# Лабораторная №1 по предмету методы оптимизации университет ИТМО.

Группа: М3237

Команда: пацаны на отSOSе

Участники: Курдюков Кирилл Алексеевич, Харёв Павел Андреевич, Стрельников Илья Денисович.

1 Постановка задания:

1. Реализовать алгоритмы:

* метод градиентного спуска
* метод наискорейшего спуска
* метод сопряженных градиентов

Оценить, как меняется скорость сходимости, если для поиска величины шага использовать различные методы одномерного поиска:

* метод дихотомии
* метод золотого сечения
* метод Фиббоначи
* метод парабол
* комбинированный метод Брента

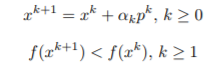
1. Проанализировать траектории методов для нескольких квадратичных функциий.
2. Исследовать, как зависит число итераций, необходимой методам для сходимости, от следующих двух параметров:

* числа обусловленности k >= 1 оптимизируемой функции;
* размерности пространства n оптимизируемых переменных

Для задачи параметров n и k сгенерировать случайным образом квадратичную задачу размера n с числом обусловленности k и запустить на ней методы с некоторой заданной точностью. Замерить число итераций T(n, k), которое потребовалось сделать методу до сходимости.

2 Вычислительная схема алгоритмов.

В данной лабораторной работе рассматриваются итерационные методы, имеющий вид:



**2.1 Метод градиентного спуска**

Метод градиентного спуска – метод нахождения минимума многомерной функции, основная идея которого – осуществлять оптимизацию функции в направлении наискорейшего спуска, а именно антиградиента .

На каждой итерации метода полагается . Если , то условие , очевидно, выполнено. Следовательно, направление вектора является направлением убывания функции , причем в малой окрестности точки  направление обеспечивает наискорейшее убывание этой функции. Поэтому можно найти такое , что будет выполняться условие .

* Начальная данные: 
* Итерационный процесс:

Шаг 1. Задать параметр точности , начальный шаг , выбрать  и вычислить f(x). Перейти к шагу 2.

Шаг 2. Вычислить  и проверить условие достижения точности .

Если оно выполнено, то вычисления завершить, полагая . Иначе перейти к шагу 3.

Шаг 3. Найти  и . Если , то положить x = y, f(x) = f(y) и перейти к шагу 2, иначе – к шагу 4.

Шаг 4. Положить a = a / 2 и перейти к шагу 3.

Необходимо отметить, что вблизи стационарной точки функции f(x) величина  становится малой. Это часто приводит к замедлению сходимости последовательности . Поэтому в основной формуле  иногда полагают , используя вместо антиградиента вектор единичной длины в этом же направлении.

**2.2 Метод наискорейшего спуска**

Метод наискорейшего спуска – модификация метода градиентного спуска. Движение происходит в направлении антиградиента до тех пор, пока не достигнем минимума функции f на этом направлении. Для каждого антиградиента ищется самая оптимальная величина шага  с помощью метода одномерной оптимизации задачи: т. е. на каждой итерации в направлении антиградиента  совершается исчерпывающий спуска.

* Итерационный процесс:

Шаг 1. Задать параметр точности , выбрать . Вычислить f(x). Перейти к шагу 2.

Шаг 2. Вычислить  и проверить условие достижения точности: . Если оно выполнено, вычисления завершить, полагая . Иначе - перейти к шагу 3.

Шаг 3. Решить задачу одномерной оптимизации выше. Положить  и перейти к шагу 2.

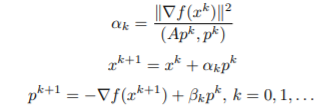
**2.3 Метод сопряженных градиентов**

В первых двух методах в качестве направления убывания функции использовался только вектор антиградиента. Однако такой выбор направления убывания не всегда бывает удачным. В частности, для плохо обусловленных задач минимизации направление антиградиента в точке 

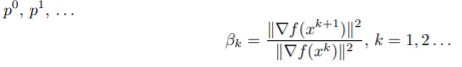
может значительно отличаться от направления к точке минимума . В результате траектория приближения к точке минимума имеет зигзагообразный характер.

В отличие от предыдущих двух методов, в методе сопряженных градиентов направления спуска представляют из себя А – ортогональные вектора, из – за чего метод решает квадратичную задачу оптимизации не более чем за n итераций, где n – размерность пространства, что является преимуществом метода. Метод сопряженных градиентов хорошо работает в случае, если f не является квадратичной функцией, но при этом необязательно сходится к минимуму за предсказуемое число шагов.

* Итерационный процесс:



Значения  выбираются так, чтобы при минимизации квадратичной функции с положительно определенной матрицей получалась последовательность ортогональных векторов:



Одной их важных оптимизаций метода является “перезапуск” метода  через каждые n шагов, где n - размерность пространства. Выполнять обновление необходимо из-за того, что возникает погрешность при вычислении коэффициентов , из – за того, что вектора  могут не образовывать ортогональную систему относительно матрицы А. В итоге вектора  перестанут указывать направление убывания функции.

Можно заметить, что при вычислении  в явном виде не используется матрица А, поэтому метод может применяться для минимизации не только квадратичных функций.

3 Результаты исследования

При исследовании критерием останова принималось условие = 10^(-5), а за начальное приближение бралась точка (0, 0). Начальное  в градиентном спуске (скорость спуска) бралось равным 100.

* f(x, y) = 99 \* x \* x + 126 \* x \* y + 64 \* y \* y - 10 \* x + 30 \* y + 13